

Die kritische GröÙe eines homogenen Reaktors nach der Viergruppen-Diffusionstheorie

Von D. EMENDÖRFER, K.-H. HÖCKER und M. RITZI

Aus der Abteilung Reaktorphysik des Instituts für Theoretische und Angewandte Physik
der Technischen Hochschule Stuttgart

(Z. Naturforsch. **11 a**, 731—735 [1956]; eingegangen am 20. Juni 1956)

Die Diffusion von Neutronen im Reaktor wird durch eine Einteilung des gesamten Energiebereichs in vier Intervalle behandelt. Die Diffusionsgleichungen werden aufgestellt und die charakteristische Gleichung zur Bestimmung der ReaktorgröÙe diskutiert.

Die räumliche Verteilung der schnellen und thermischen Neutronen durch Diffusion ist maßgebend für die kritische GröÙe eines Reaktors bei gegebener Urkonzentration. Die Wirkungsquerschnitte des Reaktor- und Reflektormaterials hängen von der jeweiligen Neutronenenergie ab, so daß neben dem Neutronenfluß auch die Diffusionskoeffizienten und Quellterme Funktionen der Energie sind.

Man beschreibt nach dem Vorgehen von FRIEDMAN, WEINBERG und WHEELER diese energieabhängige Diffusion durch die Gruppendiffusionsmethode¹, indem man den Energiebereich von der Spaltenergie bis zur thermischen Energie in geeignete Intervalle einteilt. Für jedes Energieintervall werden mittlere Transport- und Absorptionswirkungsquerschnitte berechnet. Die Neutronen diffundieren nach dieser Beschreibung solange in einer bestimmten Gruppe, bis sie die Zahl von Stößen ausgeführt haben, die zur Abbremsung über das betreffende Energieintervall hinweg erforderlich ist.

Man hat mindestens zwei Neutronengruppen anzusetzen, um die kritischen Daten eines Reaktors hinreichend genau berechnen zu können. Die eine Gruppe ist die thermische Gruppe. Sie reicht bis 0,17 eV. Alle Neutronen höherer Energie sind in der schnellen Gruppe. Diese umfaßt als charakteristische Bereiche den Resonanzbereich des Spaltmaterials, der mit seinen Ausläufern beim Uran bis 400 eV hinauf reicht, und auf der Moderatorseite den Bereich konstanten Streuquerschnitts zwischen 1 eV und 10⁴ oder 10⁵ eV; für höhere Energien fällt der Streuquerschnitt wieder ab. Wenn man eine

genauere Rechnung als die mit zwei Gruppen anstrebt, erscheint bei dieser Sachlage eine Unterteilung in 1. schnelle Gruppe, 2. mittelschnelle Gruppe für 10² ≤ E ≤ 10⁴ oder 10⁵ eV, 3. Resonanzgruppe für 0,17 ≤ E ≤ 10² eV und 4. thermische Gruppe für E < 0,17 eV angemessen.

Das Gruppendiffusionsverfahren setzt voraus, daß die Neutronen in jeder Gruppe eine genügend große Zahl von Stößen ausführen. Eine beliebig feine Einteilung in Gruppen ist daher nicht möglich. Die schärfste Forderung stellt der Moderator Wasser, bei dem die Neutronen im Mittel nur 20 Stöße für die Abbremsung von der Spaltenergie bis zur thermischen Energie brauchen.

Die Näherungen mit einer und zwei Energiegruppen sind ausführlich publiziert bis zur Aufstellung der charakteristischen Gleichung². Für eine Mehrgruppentheorie wurden verschiedene Ansätze diskutiert^{3,4}, ohne daß sie in der zugänglichen Literatur bis zur charakteristischen Gleichung durchgeführt wären.

In der folgenden Arbeit wird die charakteristische Gleichung eines homogenen kugelförmigen Reaktors mit Reflektor für eine Viergruppeneinteilung des Neutronenenergiebereichs angegeben. Es wird angenommen, daß U²³⁵ angereichert ist, so daß Neutronenvermehrung durch mittelschnelle Spaltungen zu berücksichtigen ist. Die Rechnungen sind übertragbar auf unendlich lange Zylinder und ebene Platten. — Die numerische Rechnung kann unter erträglichem Zeitaufwand mit einem mechanischen Rechenautomaten durchgeführt werden.

¹ S. GLASSTONE u. M. C. EDLUND, *The Elements of Nuclear Reactor Theory*, D. van Nostrand Company, Inc. New York 1952, S. 227.

² Siehe ¹, S. 236 und 246.

³ Siehe ¹, S. 247.

⁴ R. EHRLICH u. H. HURWITZ jr., *Nucleonics* **12**, No. 2, 23 [1954].

⁵ Siehe ¹, S. 400.



1. Bezeichnungen

Φ = Neutronenfluß (Neutronen/cm² sec)

σ = atomarer Wirkungsquerschnitt (cm²)

Σ = makroskopischer Wirkungsquerschnitt. (cm⁻¹)
= $N \sigma$

N = Zahl der Atome pro cm³

ν = Zahl der bei thermischer Spaltung freiwerdenden Neutronen

$\bar{\nu}$ = mittlere Zahl der bei schneller Spaltung freiwerdenden Neutronen

$k = \nu \cdot \Sigma_f^{U^{235}} / (\Sigma_a^U + \Sigma_a^{Mod})$ = Zahl der schnellen Neutronen, die pro im Reaktor absorbiertes thermisches Neutron entstehen. (In der Ein- und Zweigruppentheorie wird diese Größe mit ηf bezeichnet, woraus der Vermehrungsfaktor k durch Multiplikation mit ϵp folgt.)

D = Diffusionskonstante (cm)

L = Diffusionslänge (cm)

τ = Bremslängenquadrat (cm²)

ξ_n = mittlere logarithmische Energieabnahme des Neutrons pro Stoß mit Kernen des Atomgewichts A_n .

Die hochgestellten Indizes s, e, f und a bezeichnen Streuung, Einfang, Spaltung (fission) und Gesamtabsorption (Einfang + Spaltung).

Die hochgestellten Indizes i und r bezeichnen Innenraum (Reaktor) und Reflektor.

2. Die Diffusionsgleichungen der Viergruppentheorie

Die Gruppenkonstanten werden durch Mittelung über die jeweiligen Energiebereiche bestimmt:

a) Diffusionskonstante $D = \frac{\int D(E) \Phi(E) dE}{\int \Phi(E) dE}$,

b) makroskopischer Wirkungsquerschnitt

$$\Sigma = \frac{\int \Sigma(E) \Phi(E) dE}{\int \Phi(E) dE},$$

c) Bremsquerschnitt für die Gruppe k

$$\Sigma_k = \frac{\Sigma_n^s}{(1/\bar{\xi}) \cdot \ln(E_k/E_{k+1})},$$

wobei $(1/\bar{\xi}) \cdot \ln(E_k/E_{k+1})$ die mittlere Stoßzahl im Energiebereich der Gruppe k von E_k bis E_{k+1} darstellt. $\bar{\xi}$ bezeichnet den mittleren logarithmischen Energieverlust des Neutrons pro Stoß in einem Medium mit mehreren Kernsorten:

$$\bar{\xi} = \frac{\sum_{n=1}^N \xi_n \Sigma_n^s}{\sum_{n=1}^N \Sigma_n^s}.$$

$\bar{\xi}$ ist energieabhängig, da sich die Streuquerschnitte Σ_n^s der Komponenten in der Energieabhängigkeit unterscheiden.

Quellen für die schnelle Gruppe (Index 1) sind die thermische Spaltung

$$k \Sigma_4^{a,i} \Phi_4^i$$

und die schnelle Spaltung von U^{238} und U^{235} . Die schnelle Spaltung von U^{238} spielt im homogenen Reaktor praktisch keine Rolle, da die schnellen Neutronen bei den ersten Stößen sehr wahrscheinlich auf Moderatorsubstanz treffen und dadurch unter die Schwellenenergie der U^{238} -Spaltung abgebremst werden. Es wird daher nur der von der schnellen Spaltung des U^{235} im Resonanzbereich herrührende Beitrag

$$\bar{\nu} \Sigma_3^{f,i} \Phi_3^i$$

mit

$$\bar{\nu} = \frac{\int \nu(E) \Sigma_f(E) \Phi(E) dE}{\int \Sigma_f(E) \Phi(E) dE}$$

berücksichtigt.

Die Neutronenverluste pro cm³ bestehen aus dem Abbremsen der Neutronen in die 2. Gruppe

$$-\Sigma_1^i \Phi_1^i$$

und aus dem Abwandern durch Diffusion

$$D_1^i \Delta \Phi_1^i.$$

In der Näherung der Diffusionstheorie gilt damit folgende Bilanzgleichung für die 1. Gruppe im Reaktor:

$$D_1^i \Delta \Phi_1^i - \Sigma_1^i \Phi_1^i + \bar{\nu} \Sigma_3^{f,i} \Phi_3^i + k \Sigma_4^{a,i} \Phi_4^i = 0.$$

Dividiert man mit D_1^i durch und führt für D_1^i/Σ_1^i das Bremslängenquadrat τ_1^i ein, so gilt:

$$\Delta \Phi_1^i - \frac{1}{\tau_1^i} \Phi_1^i + \frac{\bar{\nu} \Sigma_3^{f,i}}{D_1^i} \Phi_3^i + \frac{k}{D_1^i} \Sigma_4^{a,i} \Phi_4^i = 0. \quad (1a)$$

Die Diffusion der schnellen Neutronen durch die Reaktoroberfläche stellt die einzige Quelle für die 1. Gruppe im Reflektor dar, vorausgesetzt, daß im Reflektor keine zusätzlichen Neutronen entstehen. Die Verluste bestehen im Abwandern in die nächste Gruppe und in der Diffusion nach außen, also

$$\Delta \Phi_1^r - \frac{1}{\tau_1^r} \Phi_1^r = 0. \quad (1b)$$

Die in der 1. Gruppe durch Abbremsen verlorengehenden Neutronen treten in der 2. Gruppe als

Quelle auf, usw. Die Zahl der Neutronen, die eine Gruppe überspringen, ist für die gewählte Gruppeneinteilung, z. B. bei Wasserstoffbremsung, nicht größer als 1% und wird daher vernachlässigt. Echte Absorption erfolgt nur in der Resonanzgruppe und in der thermischen Gruppe, jeweils durch Strahlungs- (Σ^e) und Spalteinfang (Σ^f), $\Sigma^a = \Sigma^e + \Sigma^f$. Im Rahmen der gewöhnlichen Diffusionstheorie müssen in diesen Gruppen auf Grund der merklichen Neutronenabsorption Korrekturfaktoren an den Quelltermen angebracht werden. Nach GLASSTONE und EDLUND⁵ gilt für die Quellkorrektur, bei Beschränkung auf isotrope Streuung im Laborsystem

$$q_k = 1 - \frac{4}{5} \frac{\Sigma_k^a}{\Sigma_k}.$$

Somit gelten für die übrigen Gruppen die folgenden Diffusionsgleichungen:

im Reaktor:

$$\Delta \Phi_2^i - \frac{1}{\tau_2^i} \Phi_2^i + \frac{\Sigma_1^i}{D_2^i} = 0, \quad (2a)$$

$$\Delta \Phi_3^i - \frac{1}{\tau_3^i} \Phi_3^i - \frac{1}{(L_3^i)^2} \Phi_3^i + q_3 \frac{\Sigma_2^i}{D_3^i} \Phi_2^i = 0, \quad (3a)$$

$$\Delta \Phi_4^i - \frac{1}{(L_4^i)^2} \Phi_4^i + q_4 \frac{\Sigma_3^i}{D_4^i} \Phi_3^i = 0; \quad (4a)$$

im Reflektor:

$$\Delta \Phi_2^r - \frac{1}{\tau_2^r} \Phi_2^r + \frac{\Sigma_1^r}{D_2^r} \Phi_1^r = 0, \quad (2b)$$

$$\Delta \Phi_3^r - \frac{1}{\tau_3^r} \Phi_3^r + \frac{\Sigma_2^r}{D_3^r} \Phi_2^r = 0, \quad (3b)$$

$$\Delta \Phi_4^r - \frac{1}{(L_4^r)^2} \Phi_4^r + \frac{\Sigma_3^r}{D_4^r} \Phi_3^r = 0, \quad (4b)$$

wobei die Diffusionslänge durch $L^2 = D/\Sigma^a$ gegeben ist.

3. Der Neutronenfluß im Reaktor und Reflektor

a) Der Neutronenfluß im Reaktor

Die Gleichungen (1a) bis (4a) haben die Form

$$\Delta \Phi_k^i = - \sum_{l=1}^4 c_{k,l} \Phi_l^i, \quad k=1, \dots, 4. \quad (5)$$

Setzt man für Φ_k^i ($k=1, \dots, 4$) Linearkombinationen von 4 Lösungen der Differentialgleichung

$$\Delta X_l = -B_l^2 X_l, \quad l=1, \dots, 4 \quad (6)$$

an, also

$$\begin{aligned} \Phi_1^i &= \sum_{l=1}^4 A_l X_l(r), & \Phi_2^i &= \sum_{l=1}^4 S_l A_l X_l(r), \\ \Phi_3^i &= \sum_{l=1}^4 S_{4+l} A_l X_l(r), & \Phi_4^i &= \sum_{l=1}^4 S_{8+l} A_l X_l(r), \end{aligned} \quad (7)$$

so kann man für spezielle Werte von B_l^2 und S_k , die nur von den Materialeigenschaften des Reaktors abhängen, ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem der Art (5) befriedigen. Geht man mit Φ_1^i und Φ_2^i in die Differentialgleichung (2a) ein, so folgt, unter Berücksichtigung von

$$\Delta \Phi_2^i = - \sum_{l=1}^4 B_l^2 S_l A_l X_l,$$

die Gleichung

$$\sum_{l=1}^4 A_l X_l \left[S_l (-B_l^2) - \frac{1}{\tau_2^i} S_l + \frac{\Sigma_1^i}{D_2^i} \right] = 0,$$

die für $A_l \neq 0$ und alle r nur erfüllt ist, wenn der Faktor von $A_l X_l(r)$ verschwindet, d. h. wenn

$$S_l = \frac{D_1^i}{D_2^i \tau_1^i \left(\frac{1}{\tau_2^i} + B_l^2 \right)}, \quad l=1, \dots, 4, \quad (8)$$

mit $\Sigma_1^i/D_1^i = 1/\tau_1^i$.

Entsprechend können die Differentialgleichungen (3a) und (4a) für die Resonanzgruppe und die thermische Gruppe erfüllt werden, mit

$$\begin{aligned} S_{4+l} &= \frac{q_3 D_2^i}{D_3^i \tau_2^i \left(\frac{1}{\tau_3^i} + \frac{1}{(L_3^i)^2} + B_l^2 \right)} S_l, \\ S_{8+l} &= \frac{q_4 D_3^i}{D_4^i \tau_3^i \left(\frac{1}{(L_4^i)^2} + B_l^2 \right)} S_{4+l}, \\ l &= 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (8)$$

Die Differentialgleichung (1a) der schnellen Gruppe wird durch die so bestimmten Lösungen Φ_4^i , Φ_3^i und Φ_1^i befriedigt, wenn die B_l^2 Wurzeln der folgenden Gleichung 4. Grades in B_l^2 sind,

$$Y = \left[(1 + \tau_1^i B_l^2) (1 + \tau_2^i B_l^2) \left(1 + \tau_3^i B_l^2 + \frac{\tau_3^i}{(L_3^i)^2} \right) - q_3 \frac{\tau_3^i}{D_3^i} \Sigma_3^{f,i} \right] (1 + (L_4^i)^2 B_l^2) - q_3 q_4 k = 0, \quad (9)$$

die sich wieder durch Nullsetzen des Faktors von $A_l X_l$ ergibt.

Für $B^2 = 0$ ist das 1. Glied ≈ 1 , das 2. Glied $\ll 1$, da $\Sigma_3^{a,i}$ und $\Sigma_3^{f,i} \ll 1$ sind; k ist > 1 ; somit $Y < 0$. Bei wachsendem $B^2 > 0$ überwiegt bald das erste Glied, so daß $Y > 0$. Da sich die Vorzeichen der Glieder mit wachsendem $B^2 > 0$ nicht ändern, bleibt Y nach dem Vorzeichenwechsel immer > 0 . Es gibt also nur 1 positive reelle Wurzel, B_l^2 . Sie liegt in der Nähe der positiven Wurzel von B^2 nach der Zweigruppentheorie.

Für große $B^2 < 0$ ist Y wieder > 0 . Es existiert also neben der positiven mindestens noch eine negative reelle Wurzel. Die beiden übrigen Wurzeln sind entweder beide negativ reell oder konjugiert komplex mit negativem Realteil. Dies hängt von den Wirkungsquerschnitten und von der Einteilung des Energiebereichs in die 3 schnellen Gruppen ab.

b) Der Neutronenfluß im Reflektor

Für den Fluß im Reflektor machen wir einen den Gln. (7) entsprechenden Ansatz. Da die Reflektorgln. (1b) und (4b) einfacher gebaut sind, sind die entsprechenden Ansätze ihrerseits einfacher. So wird im Reflektor die schnelle Gruppe lediglich aus dem Reaktor gespeist, ist also mit keiner anderen Gruppe gekoppelt. Wir setzen daher

$$\Phi_1^r = E_1 Z_1(r).$$

Die mittelschnelle Gruppe ist mit der schnellen gekoppelt, daher

$$\Phi_2^r = T_1 E_1 Z_1 + E_2 Z_2$$

und entsprechend (10)

$$\begin{aligned} \Phi_3^r &= T_2 E_1 Z_1 + T_3 E_2 Z_2 + E_3 Z_3 \\ \Phi_4^r &= T_4 E_1 Z_1 + T_5 E_2 Z_2 + T_6 E_3 Z_3 + E_4 Z_4. \end{aligned}$$

Die T_l entsprechen den S_l und die E_l den A_l . Man findet durch eine analoge Rechnung:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{D_1^r}{D_2^r \tau_1^r \left(\frac{1}{\tau_2^r} - \frac{1}{\tau_1^r} \right)}; \\ T_2 &= \frac{D_2^r}{D_3^r \tau_2^r \left(\frac{1}{\tau_3^r} - \frac{1}{\tau_2^r} \right)} T_1; \\ T_3 &= \frac{D_3^r}{D_4^r \tau_3^r \left(\frac{1}{\tau_4^r} - \frac{1}{\tau_3^r} \right)}; \\ T_4 &= \frac{D_4^r}{D_5^r \tau_4^r \left(\frac{1}{\tau_5^r} - \frac{1}{\tau_4^r} \right)} T_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_5 &= \frac{D_5^r}{D_4^r \tau_3^r \left(\frac{1}{(L^r)^2} - \frac{1}{\tau_2^r} \right)} T_3; \\ T_6 &= \frac{D_3^r}{D_4^r \tau_3^r \left(\frac{1}{(L^r)^2} - \frac{1}{\tau_3^r} \right)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Die Z_k sind Lösungen der homogenen Teile der Differentialgleichungen (1b) bis (4b)

$$\Delta Z_k - \kappa_k^2 Z_k = 0 \quad (12)$$

mit $\kappa_k^2 = 1/\tau_k^r$ für $k = 1, 2, 3$; $\kappa_4^2 = 1/(L^r)^2$.

Die Lösungen X_l und Z_k der Differentialgleichungen (6) und (12) haben für einen Kugelreaktor mit dem Radius R_0 und einen kugelschalenförmigen Reflektor der Dicke δ die Form

$$X_l = \frac{\sin(B_l r)}{r}, \quad Z_k = \frac{\sin \kappa_k (R_0 + \delta - r)}{r}. \quad (13)$$

δ enthält neben der materiellen Reflektordicke Δ die Extrapolationsstrecke d , die hilfswise eingeführt wird, um eine brauchbare Randbedingung auf der Grundlage der Diffusionstheorie formulieren zu können ($\delta = \Delta + d$). Damit ist der Neutronenfluß im Reaktor und Reflektor bis auf die Mischungskoeffizienten A_1 bis A_4 und E_1 bis E_4 bestimmt. Diese werden bis auf eine Konstante durch die Anschlußbedingungen für Neutronenfluß Φ und -strom $-D \nabla \Phi$ an der Grenze zwischen Reaktor und Reflektor festgelegt. Sie lauten:

$$\Phi_k^i(R_0) = \Phi_k^r(R_0) \quad (14)$$

$$D_k^i \nabla \Phi_k^i \Big|_{R_0} = D_k^r \nabla \Phi_k^r \Big|_{R_0}, \quad k = 1, \dots, 4.$$

4. Die kritische Größe des Reaktors

Die Anschlußbedingungen (14) stellen 8 homogene Gln. für die 8 Konstanten A_1 bis A_4 und E_1 bis E_4 dar. Durch Nullsetzen der Koeffizientendeterminante dieses Gleichungssystems erhält man unter Berücksichtigung der Wurzeln von Gl. (9) und der Kopplungskonstanten (8) und (11) die Bestimmungsgleichung für den Radius R_0 des Reaktors, bei dem sich ein stationärer Zustand einstellt. Für die praktische Durchführung wurden zunächst die Konstanten E_1 bis E_4 der Reflektorklösungen aus den Gln. (14) eliminiert. Damit reduziert sich die Koeffizientendeterminante vom 8. auf den 4. Grad. Die charakteristische Gleichung hat somit die Form:

$$\|a_{ik}\| = 0, \quad i, k = 1, \dots, 4. \quad (15)$$

Die Elemente dieser Determinante hängen von den Werten B_l ab, die durch (9) bestimmt sind. Nehmen wir als erstes an, daß die Gl. (9) 1 positive und 3 negative reelle Wurzeln hat. Wir setzen daher als

Fall A:

$$\begin{aligned} B_1^2 &= +\mu^2, & \text{also } B_1 &= \mu; \\ B_2^2 &= -\nu^2, & B_2 &= i\nu; \\ B_3^2 &= -\varrho^2, & B_3 &= i\varrho; \\ B_4^2 &= -\omega^2, & B_4 &= i\omega. \end{aligned}$$

Die negativen B_l ergeben keine neuen Lösungen.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} a_{1k} &= f_1 - e_1 g_k, \\ a_{2k} &= f_2 h_k - g_k j_k, \\ a_{3k} &= f_3 m_k - g_k n_k, \\ a_{4k} &= f_4 o_k - g_k p_k, \end{aligned} \quad (k=1, \dots, 4) \quad (16)$$

mit

$$\begin{aligned} f_k &= \left(\frac{Z_k'}{Z_k} \right)_{r=R_0} = -\alpha_k \operatorname{Cotg}(\alpha_k \delta) - \frac{1}{R_0}, \\ g_1 &= \left(\frac{X_1'}{X_1} \right)_{r=R_0} = +\mu \operatorname{ctg}(\mu R_0) - \frac{1}{R_0}, \\ g_2 &= \left(\frac{X_2'}{X_2} \right)_{r=R_0} = +\nu \operatorname{Cotg}(\nu R_0) - \frac{1}{R_0}, \\ g_3 &= \left(\frac{X_3'}{X_3} \right)_{r=R_0} = +\varrho \operatorname{Cotg}(\varrho R_0) - \frac{1}{R_0}, \\ g_4 &= \left(\frac{X_4'}{X_4} \right)_{r=R_0} = +\omega \operatorname{Cotg}(\omega R_0) - \frac{1}{R_0}. \end{aligned} \quad (17)$$

Die folgenden Größen hängen nicht mehr von der Anschlußstelle R_0 , sondern nur noch von den Materialeigenschaften des Reaktors ab, können also für ein bestimmtes Problem ein für alle mal berechnet werden:

$$\begin{aligned} e_k &= D_k^i / D_k^r; \\ h_k &= S_k - T_1, \\ j_k &= e_2 S_k - e_1 T_1, \\ m_k &= S_{4+k} - T_2 - h_k T_3, \\ n_k &= e_3 S_{4+k} - e_1 T_2 - T_3 j_k, \\ o_k &= S_{8+k} - T_4 - T_5 h_k - T_6 m_k, \\ p_k &= e_4 S_{8+k} - e_1 T_4 - T_5 j_k - T_6 n_k, \end{aligned} \quad (18)$$

wobei die Kopplungskonstanten S und T durch (8) und (11) bestimmt sind.

Fall B: Die Gl. (9) habe neben einer positiven und einer negativen reellen Wurzel zwei konjugiert komplexe Wurzeln:

$$\begin{aligned} B_1^2 &= +\mu^2, & \text{also } B_1 &= \mu; \\ B_2^2 &= -\nu^2, & B_2 &= i\nu; \\ B_3^2 &= \xi + i\eta, & B_3 &= x + iy; \\ B_4^2 &= \xi - i\eta, & B_4 &= x - iy \end{aligned}$$

$$\text{mit } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\xi^2 + \eta^2} + \xi}$$

und

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\xi^2 + \eta^2} - \xi}.$$

Damit ist die 4. Spalte der charakteristischen Determinanten (15) konjugiert komplex zur 3. Spalte. Man kann daher eine einfachere charakteristische Gleichung gewinnen, wenn man alle komplexen Größen mit $k=3, 4$ wie folgt durch ihren Real- bzw. Imaginärteil ersetzt:

$$\begin{aligned} \text{z. B.} \quad g_3 &\rightarrow \Re(g_3) = \Re(g_4) \\ g_4 &\rightarrow \Im(g_3) = -\Im(g_4) \end{aligned}$$

usw.

Die charakteristische Gleichung wird wie folgt gelöst: Aus den Gruppenkonstanten D, Σ, τ, L und k werden zunächst die Wurzeln B_l der Gl. (9) und die rein materialabhängigen Konstanten (18) bzw. (20) bestimmt. Die R_0 -abhängigen Größen (17) bzw. (20) berechnet man einmal für den Radius R_0 des Reaktors nach der Zweigruppentheorie, dann für einen kleineren Radius, und bildet die a_{ik} . Trägt man $\|a_{ik}\|$ über R_0 auf, so kann man durch Interpolation die gesuchte Nullstelle erschließen.

Ist die kleinste Wurzel R_0 der charakteristischen Gleichung bekannt, so bestimmt man aus (14) die Konstanten A_1 bis A_4 und E_1 bis E_4 , also die räumliche Verteilung der Flüsse Φ_1 bis Φ_4 im Reaktor und Reflektor. Die Konstanten A_3 und A_4 sind im Falle B gleich groß, so daß sich die komplexen Beiträge $A_3 X_3, A_4 X_4, A_3 S_3 X_3, A_4 S_4 X_4, A_3 S_7 X_3, A_4 S_8 X_4, A_3 S_{11} X_3$ und $A_4 S_{12} X_4$ in den Flüssen Φ_1^i und Φ_4^i zu reellen Größen überlagern.

Ein Vergleich zwischen den Ergebnissen der Vier- und Zweigruppentheorie wurde am Beispiel eines homogenen Wasserkochers vom Typ LOPPO durchgeführt. Die Viergruppentheorie ergibt einen um etwa 1 cm kleineren Radius als die Zweigruppentheorie, bei einem Reaktor-Radius von 15 cm.